Příklady k přednášce 2. 3. 2020

I. Ještě poznámka k minulé přednášce – – transformace souřadnic vektoru při změně báze:

R^n, $\{\vec{e_1}, \dots \vec{e_n}\}$ báze základní (kanonická)
$\{\vec{b_1}, \dots \vec{b_n}\}$ báze „jiná"

Je-li $\vec{x} \in R^n$, pak $\vec{x} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + \dots + x_n\vec{e_n}$ $(n \in N)$

ale také (jednoznačně)
$\vec{x} = \tilde{x}_1\vec{b_1} + \tilde{x}_2\vec{b_2} + \dots + \tilde{x}_n\vec{b_n}$

? Jak „souvisí" nové vyjádření vektoru $\vec{x}$, tj. $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ a „staré", tj. $(x_1, \dots x_n) = x$?

(vektory budeme psát „svisle")

$$x = \tilde{x}_1\vec{b_1} + \tilde{x}_2\vec{b_2} + \dots + \tilde{x}_n\vec{b_n}, \text{ tj.}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \tilde{x}_1 \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} + \tilde{x}_2 \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{pmatrix} + \dots + \tilde{x}_n \begin{pmatrix} b_{1n} \\ b_{2n} \\ \vdots \\ b_{nn} \end{pmatrix} \quad (*)$$

Užijeme-li definici násobení matice vektorem, pak z vyjádření (sečteme vektory v (*))

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}\tilde{x}_1 + b_{12}\tilde{x}_2 + \dots + b_{1n}\tilde{x}_n \\ b_{21}\tilde{x}_1 + b_{22}\tilde{x}_2 + \dots + b_{2n}\tilde{x}_n \\ \dots \\ b_{n1}\tilde{x}_1 + b_{n2}\tilde{x}_2 + \dots + b_{nn}\tilde{x}_n \end{pmatrix}$$

dostaneme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix}$$

tedy (označme $\tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & & b_{2n} \\ \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & & b_{nn} \end{pmatrix}$)

„máme" $\underline{x = B\tilde{x}}$ a tedy $\underline{\tilde{x} = B^{-1}x}$

"(kde B je regulární matice – její sloupce jsou vektory „nové" báze, tedy LNZ vektory)

1) Příklad (teoretický)

A odtud: „změna" matice zobrazení $L : R^n \to R^m$ (L – lineární zobrazení z R^n do R^m):

je-li $L(x) = A \cdot x$ (A – matice zobrazení L
A typu (m, n).
v R^n i R^m předpokládáme „jednoduché" báze
$\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ v R^n,
$\{\vec{e}_1, \dots \vec{e}_m\}$ v R^m.

A báze „změníme": – „nové" báze:
v R^n: $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$, v R^m $\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_m\}$

Pak když původně je $\quad (\, L(x) = y \,) \quad y = A \cdot x$,
pak po změně bází je: $\quad x = B\tilde{x} \quad$ a $\quad y = C\tilde{y}$
(B, C jsou matice „nových bází") , pak

z $\; y = Ax \;$ dostaneme $\qquad C\tilde{y} = AB\tilde{x}$,
tedy (opět – vynásobíme C^{-1}) $\qquad \tilde{y} = (C^{-1} \cdot A \cdot B)\,\tilde{x}$,
tedy matice zobrazení L v „nových" bázích je

$$\underline{\tilde{A} = C^{-1}AB} \qquad \left(\begin{array}{l} A - \text{typu } (m,n) \\ B - \text{typu } (n,n) \\ C^{-1} - \text{typu } (m,m) \end{array} \right)$$

2) <u>Příklad (praktický)</u>

Je dáno zobrazení $L: R^2 \to R^2$,

$$L\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad \text{pak}$$

$$L\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = L\left(x_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = x_1\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},$$

tj. $$L\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 1\\3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \qquad \left(A = \begin{pmatrix}4 & 1\\3 & 1\end{pmatrix} \right)$$

Zvolme v R^n „nové" báze $\vec{b}_1 = (2,3)$, $\vec{b}_2 = (1,2)$

„svisle": $\; b_1 = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \quad \bar{b}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

Potom „nové" souřadnice vektoru $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ označíme $\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}$

a máme $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} \quad \left(B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \right)$

$$\text{a} \quad \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

a „nová" matice zobrazení je

$$\tilde{A} = B^{-1} A B \quad ,$$

tedy

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 7 \\ -15 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\left(= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 6 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 7 \\ -15 & -8 \end{pmatrix} \right)$$

(asociativní zákon násobení matic umožní zde násobení $B^{-1} \cdot (AB) = (B^{-1} \cdot A) \cdot B$)

II. Obyčejné lineární diferenciální rovnice 2. řádu

Cauchyho (neboli počáteční) úloha:

jsou dány funkce $p(x), q(x), f(x) \in C(a,b)$ $(a<b)$, $x_0 \in (a,b)$, $y_0, y_1 \in R$. A „hledáme" funkci $y(x) \in C^{(2)}(a,b)$ tak, aby

$$(1) \quad y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x) \text{ pro } \forall x \in (a,b)$$

a

$$(2) \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1.$$

($y(x_0) = y_0$ a $y'(x_0) = y_1$ – počáteční podmínky)

Platí věta o existenci a jednoznačnosti řešení

Věta. Je-li $p, q, f \in C(a,b)$, $x_0 \in (a,b)$, $y_0, y_1 \in R$, pak počáteční (Cauchyho) úloha (1), (2) má právě jedno řešení $y = y(x)$, $y(x) \in C^{(2)}(a,b)$.

Jak toto řešení můžeme najít? Zde pomůže lineární algebra – dá „návod":

Označme ($x \in (a,b)$ a $p(x), q(x) \in C(a,b)$)

$$D_2(y) = y''(x) + p(x)y'(x) + q(x) \cdot y(x), \text{ pak}$$

D_2 je zobrazení z $C^{(2)}(a,b)$ do $C(a,b)$ a to lineární, tedy z LA víme, že máme řešit:

1) $y'' + p(x).y' + q(x)y = 0$

a zde množina řešení je podprostor prostoru $C^2(a,b)$ – tedy, když najdeme bázi tohoto prostoru řešení, máme „řešení všechna";

2) stačí najít jedno (tzv. partikulární) řešení $y_p(x)$ rovnice

$$y'' + p(x).y' + q(x).y = f(x)$$

3) a pak libovolné řešení dané rovnice $y(x)$ je

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x),$$

kde $y_0(x)$ řeší rovnici „bez pravé strany"

(a $y_0(x)$ se „volí" tak, aby byly splněny počáteční podmínky Cauchyho úlohy)

<u>A řešení (dle návodu LA)</u>

1) Podprostor řešení homogenní rovnice

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (*)$$

je podprostor $C^{(2)}(a,b)$ dimense 2.

(tj. stačí najít dvě lineárně nezávislá řešení homogenní rovnice (*) – $y_1(x), y_2(x)$ a pak všechna řešení jsou ve tvaru

$$\underline{y_H(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)\ ,\ c_1, c_2 \in R,\ x \in (a,b)}\ )$$

Dvojice řešení $y_1(x), y_2(x)$ – v teorii diferenciálních rovnic se nazývá „fundamentální systém" řešení rovnice (*)

Důkaz: „Vezmeme" dvě počáteční podmínky

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{a zvolíme } x_0 \in (a,b)).$$

K nim dle existenční věty ex. vždy jediné řešení, které dané počáteční podmínka splňuje, označme řešení $y_1(x) \in C^{(2)}(a,b)$, pro které je $y_1(x_0)=1$, $y_1'(x_0)=0$ a $y_2(x) \in C^{(2)}(a,b)$, pro které je $y_2(x_0)=0$, $y_2'(x_0)=1$.

Pak a) lib. lineární kombinace $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, $c_1, c_2 \in R$ je řešení dané rovnice homogenní (*)) (díky linearitě $D_2(y)$);

b) libovolné řešení $y(x)$ rovnice (*) (tj. $D(y)=0$) lze vyjádřit lineární kombinací $y_1(x), y_2(x)$:

označme $p = \begin{pmatrix} y(x_0) \\ y'(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = p_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Pak díky linearitě diferenciálního operátoru D_2 je také $\tilde{y}(x) = p_1 y_1(x) + p_2 y_2(x)$ řešení rovnice (*), které splňuje počáteční podmínky $\tilde{y}(x_0) = p_1$ a $\tilde{y}'(x_0) = p_2$, a díky jednoznačnosti řešení „musí" být $\tilde{y}(x) = y(x)$, tj. důkaz „je hotov".

(?) Zůstává otázka – jak „tento fundamentální systém řešení najít!"

2) „Nalezení" partikulárního řešení rovnice s pravou stranou, tj. $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$. (**)

a) řešení metodou „uhodnutí" – příště předmětem – odhad řešení pro „jednoduché" diferenciální rovnice 2. řádu a „jednoduché" pravé strany $f(x)$)

b) funguje opět metoda variace konstant –

– řešení nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru

$$y(x) = C_1(x)\,y_1(x) + C_2(x)\,y_2(x), \quad y_1(x), y_2(x) \text{ – fund. systém řešení}$$

a $C_1(x), C_2(x)$ hledáme v $C^2(a,b)$ tak, aby $y(x)$ bylo řešení rovnice (**).

„Provedení": $y'(x) = C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)$

a zde si „zjednodušíme" další počty – položme

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0$$

(máme-li najít dvě funkce $C_1(x), C_2(x)$ a máme-li pro ně „jen jednu podmínku, tj. dif. rovnici (**), pak můžeme jednu funkci $C_1(x)$ nebo $C_2(x)$ zvolit – – nedělá se, hodně „nebezpečné" pro další výpočet druhé funkce), nebo zvolit „ještě jednu podmínku – viz nahoře – toto „funguje") a pak $y''(x) = c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) + c_1(x)y_1''(x) + c_2(x)y_2''(x)$

a nakonec dosadit do rovnice (**) (na jsme „zapomněla") - - dostaneme:

$$c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) + c_1(x)\left(y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x)\right) +$$
$$+ c_2(x)\left(y_2''(x) + p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x)\right) = f(x),$$

ale protože $y_1(x), y_2(x)$ řeší homogenní rovnici (*), je $y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x) = 0$, stejně i

$y_2''(x) + p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x) = 0$, a tedy pro $c_1'(x), c_2'(x)$ dostáváme soustavu rovnic

$$(***)\quad \begin{cases} c_1'(x)\,y_1(x) + c_2'(x)\,y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)\,y_1'(x) + c_2'(x)\,y_2'(x) = f(x) \end{cases}, \quad x \in (a,b)$$

Determinant této soustavy lineárních rovnic je (nazývá se Wronskián)

$$W(y_1,y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x), & y_2(x) \\ y_1'(x), & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

a lze ukázat, že platí: $W(y_1,y_2)(x) \neq 0$ v (a,b), je-li $y_1(x), y_2(x)$ fund. systém řešení rovnice (*)

(my zatím víme, že $W(y_1,y_2)(x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ $(=1)$)

a tedy soustava (***) má pro každé $x \in (a,b)$ řešení $c_1'(x), c_2'(x) \in C^1(a,b)$ (hladkost řešení se ukáže třeba výpočtem pomocí Cramerova pravidla) a $c_1(x), c_2(x)$ získáme pak integrací ($c_1'(x), c_2'(x)$ jsou spojité v (a,b), tedy primitivní funkce k nim existují).

3) obecné řešení pak už „najdeme" snadno z bodů 1), 2):

$$y_{ob} = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x) \quad , \quad x \in (a,b),\ c_1, c_2 \in R$$

a řešení počáteční úlohy ($x_0 \in (a,b)$)

$$\begin{aligned} y(x_0) &= p_1 \quad : \quad c_1 y_1(x_0) + c_2 (y_2(x_0)) = p_1 \\ y'(x_0) &= p_2 \quad : \quad \underline{c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = p_2} \end{aligned}$$

Soustava má právě jedno řešení c_1, c_2, neboť determinant soustavy $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$!

<u>A nyní – jak najít fundamentální systém řešení homogenní rovnice (*)</u> ? (tj. bod 1) z návodu)

Obecně těžké „vypočítat" (existence řešení je mnohdy „jednodušší") – proto budeme řešit jen speciální „dobrou" rovnici, kde $p(x) = p \in R$ a $q(x) = q \in R$ (tj. <u>lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty</u>)

Máme rovnici (*) $y'' + py' + qy = 0$, $p, q \in R$

a hledáme řešení ve tvaru $y(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda \in R$?

(nápad z analogie s řešením rovnice $y' + \alpha y = 0$, $\alpha \in R$)

Dosadíme-li do rovnice (*), dostaneme

$$(\lambda^2 + p\lambda + q)\, e^{\lambda x} = 0 \iff \lambda^2 + p\lambda + q = 0 \quad (e^{\lambda x} \neq 0 \ \forall x \in R)$$

(charakteristická rovnice rovnice (*))

Tedy – řešení lineární dif. rovnice (*) vede na řešení rovnice kvadratické; zde jsou tři možné „případy":

1) $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ – pak $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$, $y_2(x) e^{\lambda x}$ tvoří fund. systém řešení a

$$y_H(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \quad , \ x \in R \ , \ c_1, c_2 \in R$$

Zde bychom měli ukázat, že funkce $y_1(x)$, $y_2(x)$ jsou lineárně nezávislé, tj. že platí:

(i) $c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} = 0 \quad \forall x \in R \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$?

Dk: zvolme $x = 0$ pak

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(ii)}$$

a zderivujme (i) a opět dosaďme $x = 0$

Pak determinant soustavy $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ soustava má regulární matici a tedy jediné řešení soustavy (ii) je $c_1 = c_2 = 0$

<u>Poznámka</u>:

zde Wronskián $W(e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}) \neq 0$ pro $\forall x \in R$:
(bylo v obecném návodu)

$$W(e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x}, & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x}, & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{\lambda_1 x} \cdot e^{\lambda_2 x} \neq 0$$

$(\lambda_1 \neq \lambda_2)$

<u>Příklad</u> $\underline{y'' + 3y' + 2y = 0}$

$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ (charakteristická rovnice)

kořeny $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$

tedy – <u>fundamentální systém</u> řešení dané rovnice je

$\underline{y_1(x) = e^{-x},\ y_2(x) = e^{-2x}}$

a <u>obecné řešení</u> dané rovnice je

$$\underline{y_H(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}, \quad x \in R}$$

2) $\underline{\lambda_1 = \lambda_2,\ \lambda_1, \lambda_2 \in R}$ (je-li $D = p^2 - 4q = 0$)

pak „máme" jen jedno řešení $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$
a (lze ukázat) druhé je" $\underline{y_2(x) = x e^{\lambda_1 x}}$ } f.s.

? a) $y_1(x), y_2(x)$ jsou lineárně nezávislé funkce?
b) je funkce $y_2(x) = x e^{\lambda_1 x}$ řešením dané rovnice? –
– ukáže se dosazením do rovnice (tedy $p^2 - 4q = 0$)

a) lze ukázat (obecně), že pokud $W(y_1,y_2)(x) \neq 0$ v (a,b), pak $y_1(x)$ a $y_2(x)$ jsou funkce lineárně nezávislé (coby prvky prostoru $C^{(1)}(a,b)$), a zde

$$W(y_1,y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} , & x e^{\lambda_1 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} , & (1+\lambda_1 x) e^{\lambda_1 x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_1 x} \begin{vmatrix} 1 & x \\ \lambda_1 & 1+\lambda_1 x \end{vmatrix} = e^{2\lambda_1 x} \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_1 & 1 \end{vmatrix} + x \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_1 \end{vmatrix}}_{=0} \right)$$

$$= e^{2\lambda_1 x} \cdot 1 \neq 0 \; !$$

<u>Příklad</u> $\quad y'' - 4y' + 4y = 0$

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ (charakteristická rovnice)

$(\lambda - 2)^2 = 0$, tj. $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$

a fund. systém: $\quad y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = x e^{2x}$, $x \in R$

a obecné řešení: $\quad y_H(x) = (C_1 + C_2 x) e^{2x}$, $x \in R$, $C_1, C_2 \in R$

(zde, v konkrétním zadání dif. rovnice lze se snadno dosazením do rovnice přesvědčit, že funkce $y_2(x) = x e^{2x}$ je řešení rovnice, i o lineární nezávislosti s $y_1(x) = e^{2x}$)

„A zbývá"

3) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \;,\; \alpha, \beta \in R \quad (\text{pro } D = p^2 - 4q < 0)$

Pak „se ukázalo" (inspirace z fyziky, viz příklad), že fundamentální systém řešení je

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos\beta x \quad a \quad y_2(x) = e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x \;,\; x \in R$$

a tedy obecné řešení dané homogenní rovnice je

$$y_H(x) = \left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right) e^{\alpha x} \;,\; x \in R \;,\; C_1, C_2 \in R$$

Poznámka: 1) dosazením do rovnice $y'' + py' + qy = 0$ lze ukázat, že funkce $y_1(x), y_2(x)$ zde definované jsou řešení dané rovnice

2) lineární nezávislost $y_1(x), y_2(x)$ lze opět ukázat tím, že ukážeme, že $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$.

„A slíbený" příklad

1. 2. Newtonův zákon pro pohyb hmotného bodu „po přímce", působí-li na něj síla, přímo úměrná „výchylce a opačného směru – harmonický pohyb (bez působení „vnější" síly)

– výchylku od „počátku" označme $x = x(t)$, a pak příslušná síla je $F(x(t)) = -k\, x(t)$:

a dosazením : $m \cdot x''(t) = -k\,x(t)$, $t \geqq 0$, $k>0$
tedy ($m \neq 0$ – hmotnost hmotného bodu) máme
diferenciální rovnici pro $x(t)$ (označme $\frac{k}{m} = \alpha^2 > 0$) $(\alpha > 0)$

$$x''(t) + \alpha^2 x(t) = 0 \quad , \; t \geqq 0,$$

a charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 + \alpha^2 = 0, \quad tj.\; \lambda_{1,2} = \pm i\alpha$$

Zde řešení lze „uhodnout": jaké funkce mají tu vlastnost, že $x''(t) = -\alpha^2 x(t)$ –
– snadno „najdeme", že $x_1(t) = \cos\alpha t$ a $x_2(t) = \sin\alpha t$.

Navíc, $x_1(t)$, $x_2(t)$ jsou lineárně nezávislé:

jednodušše : $c_1 \cos\alpha t + c_2 \sin\alpha t = 0$ pro $\forall t \in \mathbb{R}$:

pro $t=0$: $c_1 = 0$
$t = \frac{\pi}{2\alpha}$: $c_2 = 0$ $\Big\} \Rightarrow$ $x_1(t)$, $x_2(t)$ jsou lin. nezávislé

nebo užitím $W(x_1, x_2)(t)$:

$$W(x_1,x_2)(t) = \begin{vmatrix} \cos\alpha t, & \sin\alpha t \\ -\alpha \sin\alpha t, & \alpha\cos\alpha t \end{vmatrix} = \alpha\,(\cos^2\alpha t + \sin^2\alpha t) = \alpha \neq 0 \,!$$

Tedy, funkce $x_1(t) = \cos\alpha t$ a $x_2(t) = \sin\alpha t$ tvoří fundamentální systém řešení dané rovnice (a odtud inspirace k fund. systému v obecném případě)

1.
$$y'' + 4y' + 5y = 0$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$$ (charakteristická rovnice)

$D = 16 - 20 = -4 < 0$

a $$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm i\sqrt{4}}{2} = -2 \pm i, \text{ tj.}$$

f. s. ř. $y_1(x) = e^{-2x} \cdot \cos x$, $y_2(x) = e^{-2x} \sin x$, $x \in R$

a $$\underline{y_H(x) = e^{-2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x),\ c_1, c_2 \in R, x \in R}$$